高等数值算法与应用(9)

– 偏微分方程 (chap11) –

喻文健

Outline

- 基本概念与典型问题
- 有限差分法及泊松方程
- 规则区域泊松方程的快速解法
- 数值稳定性
- L型区域的波方程

基本概念与典型问题

- Partial differential equation
  Three kinds of problems

偏微分方程

- 基本概念

各种物理现象

  - 用多元函数的偏微分(偏导数)描述的方程
  - 自变量：时间(t), 空间位置(x, y, z)

例：电场中的电势;

弹性力学中点的位移

  - 二阶线性偏微分方程 (含 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ，也记u_{xx})
  - 含两个自变量的二阶线性PDE(partial differential equation)

一般形式：$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu + g = 0$

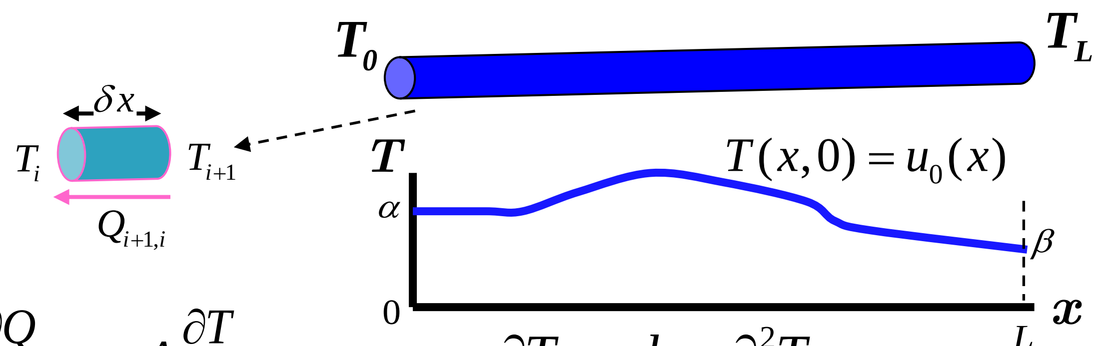
  - 可根据判别式 $b^2 - 4ac$ 分类
  - 1. $b^2 - 4ac < 0$: 椭圆型方程，例:泊松方程$u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$
  - 2. $b^2 - 4ac = 0$: 抛物型方程，例:热扩散方程$u_t - u_{xx} = f(x,t)$
  - 3. $b^2 - 4ac > 0$: 双曲型方程，例:波动方程$u_{tt} - u_{xx} = f(x,t)$
  - 这三类方程的定义可推广到含更多自变量的问题
  - 椭圆型(与时间无关的稳态); 其他两种(与时间相关的过程)

偏微分方程

- 泊松方程(Poisson equation) $\nabla\cdot(\nabla u) = -\dfrac{\rho}{\varepsilon}$
  - 静电场高斯定理 $\oiint_S \varepsilon \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = \iiint_V \rho dv \Rightarrow \nabla\cdot(\varepsilon \boldsymbol{E}) = \rho$
  - 电场强度线积分与路线无关，定义标量电势u，$\boldsymbol{E} = -\nabla u$
  - 拉普拉斯(Laplace)算子: (一维) $\triangle = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ (二维) $\triangle = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$
  - 二维泊松方程: $\triangle u = f(\vec{x})$ 特例为Laplace方程: $\Delta u = 0$
- 热方程 (一维无热源热传导问题)

热传导定律

$$Q_{i+1,i} = kA\frac{\delta T}{\delta x} \Rightarrow Q = kA\frac{\partial T}{\partial x}$$



能量守恒定律

$$(Q_{i+1,i} - Q_{i,i-1})\delta t = c\rho A\delta x\delta T \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = c\rho A\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

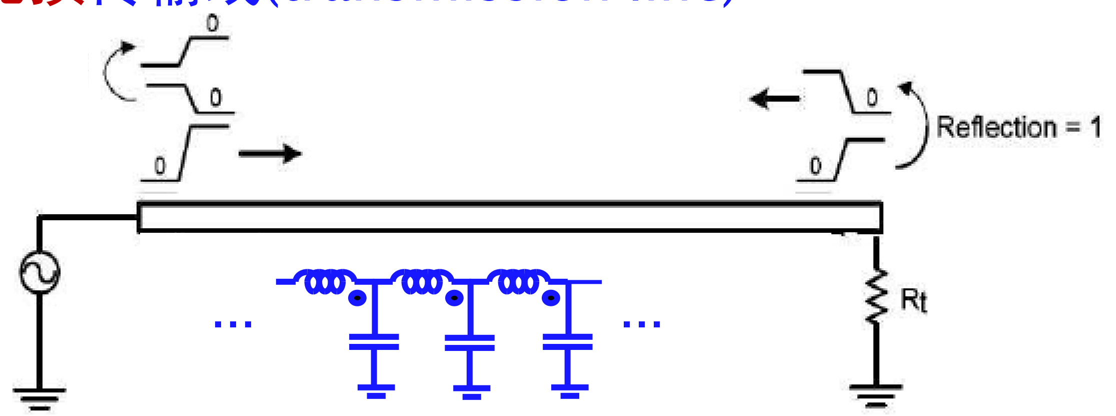
偏微分方程

- 热方程(续)
  - 一维无热源热传导方程(u为温度): $\frac{\partial u}{\partial t} = \triangle u$　假设Laplace算子前系数为1
  - 热传导方程(考虑热源): $\frac{\partial u}{\partial t} = \triangle u - f(\vec{x})$, 初始条件$u(\vec{x},0) = u_0(\vec{x})$
- 波方程　一维均匀无损传输线(transmission line)

u为电压 $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -L\frac{\partial I(x,t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = -C\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$



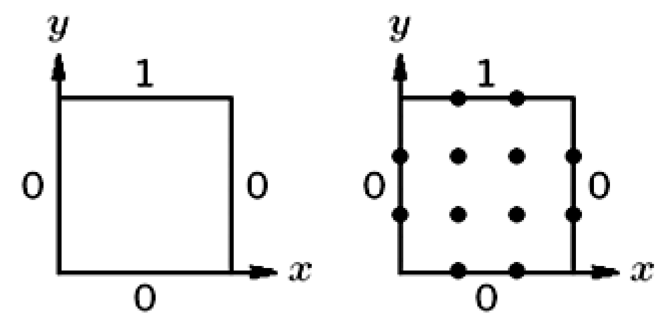
  - 假设系数LC=1，得 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \triangle u$

(像波一样，传输线上的信号会向前传递、反射)

需给初始条件，例如$u(\vec{x},0) = u_0(\vec{x})$, $\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},0) = 0$

偏微分方程

- 偏微分方程的求解
  - 多个自变量使问题复杂
  - 多个空间自变量使问题的定义域形状复杂
  - 对二维空间问题，考虑(x,y)平面内的有界区域Ω，区域边界上需指定边界条件，例如u, 或者u的偏导数值已知
  - 例：拉普拉斯方程: $\Delta u = 0$
  - 一维空间问题, 定义域a≤x≤b, 解u(x)是连接边界值的线性函数
  - 二维空间问题, 定义域x, y∈[a, b], 解u(x, y)可能很复杂
- 数值求解方法
  - 有限差分、有限元、边界元, 等等
  - 求定义域内离散点上的u的近似值



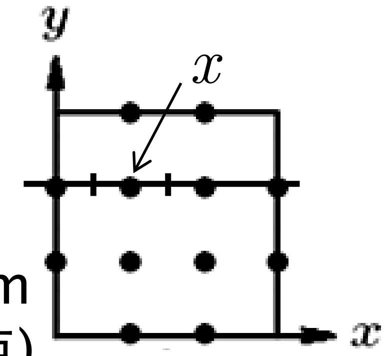
有限差分法及泊松方程

- Finite difference method
  2-D Poisson equation

有限差分方程

- 基本思想
  - 用差分(差商)代替方程中的偏导数
  - 对时间、空间定义域进行离散化
  - 重点是空间离散，例如采用均匀网格 $h=(b-a)/(m+1)$

(设单方向有m个内部网格点)

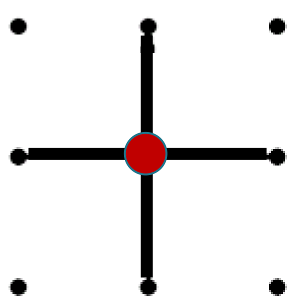


- 差分公式
  - 拉普拉斯算子 $\Delta u = \dfrac{d^2u(x)}{\partial x^2} \approx \triangle_h u(x) = \dfrac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}$
  - 即二阶中心差分近似
  - 二维情况

$$\triangle_h u(x,y) = \frac{u(x+h,y)-2u(x,y)+u(x-h,y)}{h^2} + \frac{u(x,y+h)-2u(x,y)+u(x,y-h)}{h^2}$$

离散Laplace算子

五点差分格式



也记为：

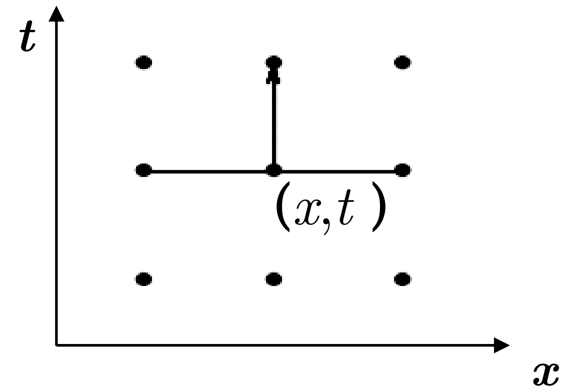
$$\triangle_h u(P) = \frac{u(N)+u(W)+u(E)+u(S)-4u(P)}{h^2}$$

据此可联立线性方程组解Poisson方程

有限差分方程

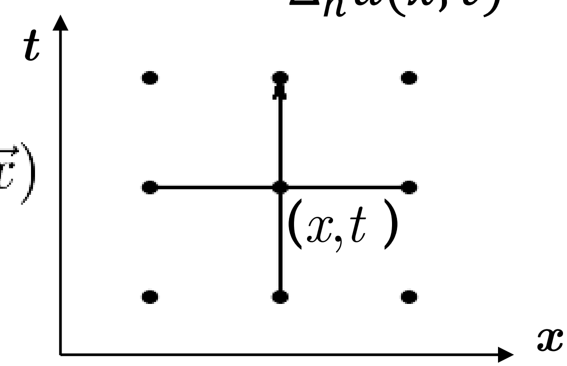
- 差分公式
  - 热方程、波方程中还有对时间的一阶、二阶偏导数
  - 一阶偏导可用向前差分(欧拉法)代替，得到显格式解法
  - 热方程问题　　(设δ为时间步长)

$$\frac{u(\vec{x},t+\delta)-u(\vec{x},t)}{\delta}=\Delta_h u(\vec{x},t)$$



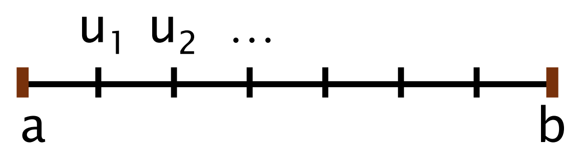
  - 利用初始条件 $u(\vec{x},0)=u_0(\vec{x})$，可逐个计算后续时间点的值
  - 波方程问题: $$\frac{u(\vec{x},t+\delta)-2u(\vec{x},t)+u(\vec{x},t-\delta)}{\delta^2}=\Delta_h u(\vec{x},t)$$
  - 本章考虑的初始条件

$$u(\vec{x},0)=u_0(\vec{x}),\ \frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},0)=0 \Rightarrow u(\vec{x},\delta)=u_0(\vec{x})$$



沿时间轴可逐步算出所有点的函数值!

有限差分法的矩阵表示



- 差分算符Δ_h (离散的拉普拉斯算子)
  - 一维情况下，u(x)对应的离散值组成的向量$\boldsymbol{u}$

$$\triangle_h u(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$

对各节点依次写，排成一列得

$$\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{pmatrix}\boldsymbol{u}$$

  - 算符Δ_h对应一个三对角矩阵
  - 矩阵A稀疏、负定; 记为$h^2\boldsymbol{\Delta}_h$
  - 则泊松方程 $\triangle u = f(\vec{x})$ 变为

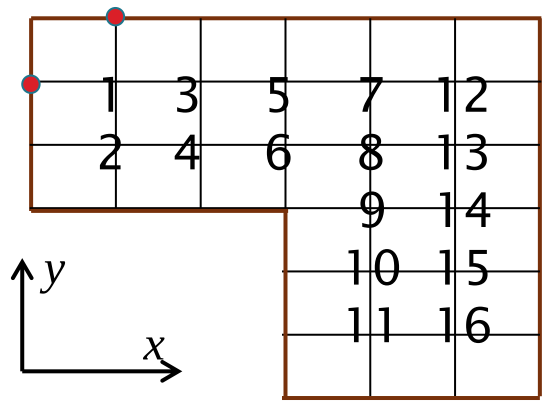
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$, 其中向量$\boldsymbol{b}$的值由$f(x)$值构成，考虑边界值的条件

$$\boxed{\boldsymbol{b} := h^2\boldsymbol{f}\ ;\quad b_1 := b_1 - u(a);\quad b_m := b_m - u(b);}$$

  - 热/波方程也可用Δ_h的矩阵形式; 显示公式不需解线性方程组
  - 对二维泊松方程，类似地可得差分算符对应的矩阵
  - 应考虑复杂区域的离散；矩阵的形成与点的编号有关

有限差分法的矩阵表示

- 复杂二维区域上的泊松方程
  - 一个小的L型区域



$$h^2(\Delta_h u)_1 = u_2 + u_3 + u(x_1, y_m) + u(x_0, y_{m-1}) - 4u_1$$

$$\vdots$$

$$h^2(\Delta_h u)_8 = u_6 + u_7 + u_9 + u_{13} - 4u_8$$

$$\vdots$$

  - 算符$h^2\boldsymbol{\Delta}_h$对应矩阵$\boldsymbol{A}$
  - 对称、稀疏矩阵(负定)，每行非零元不超过5个
  - 求解$\boldsymbol{Au} = \boldsymbol{b}$
  - 同样，$\boldsymbol{b}$包含了$f(x, y)$值及边界值的贡献

A

-4	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	-4	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	-4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	-4	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	-4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	-4	1	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	-4	1	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-4	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	-4	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	-4	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	-4	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	-4

有限差分法

- 用Matlab解泊松方程
  - numgrid生成几种二维区域的网格编号矩阵: L=numgrid('L', 7)
  - A=−delsq(L)针对网格编号L, 生成$h^2\boldsymbol{\Delta}_h$(五点差分格式)对应的矩阵$\boldsymbol{A}$
  - 根据$f(x,y)$及边界值(都乘以h^2)生成向量b, 解方程: u=A\b
  - 另一种生成网格编号L的方法

0	0	0	0	0	0	0
0	1	3	5	7	12	0
0	2	4	6	8	13	0
0	0	0	0	9	14	0
0	0	0	0	10	15	0
0	0	0	0	11	16	0
0	0	0	0	0	0	0

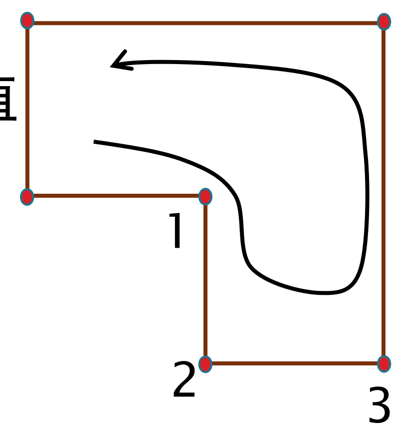
```
xv = [0 0 1 1 -1 -1 0];
yv = [0 -1 -1 1 1 0 0];
[x, y] = meshgrid(-1:h:1);
[in, on] = inregion(x, y, xv, yv);
p = find(in-on);            严格内部点
L = zeros(size(x));
L(p) = 1: length(p);        进行编号
```

返回线性编号

区域顶点的坐标值(逆时针顺序)

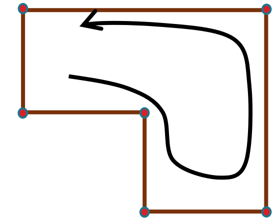
生成网格点(含边界点)的坐标值

得到区域上(in)/边界上(on)网格点



注: inregion是NCM程序

有限差分法



- 生成网格编号的程序演示
- 与$\boldsymbol{\Delta}_h$有关的Matlab命令
  - 一旦有了网格编号矩阵L，delsq命令生成$h^2\boldsymbol{\Delta}_h$对应的矩阵
  - 反过来，若已知网格上函数值u，del2命令计算各网格点上的$\boldsymbol{\Delta}_h u$ (再乘以$h^2/4$)

  例：$u(x,y) = x^2 + y^2$

  $\triangle u = 4$ (Laplace算子理论值)

  - d的维度与x, y一样，值$h^2/4 \cdot \boldsymbol{\Delta}_h$，对此例，等于4.

```
xv = [0 0 1 1 -1 -1 0];
yv = [0 -1 -1 1 1 0 0];
[x, y] = meshgrid(-1:1/3:1);
y= flipud(y);
[in, on] = inregion(x, y, xv, yv);
p = find(in-on);
L = zeros(size(x));
L(p) = 1: length(p);
```

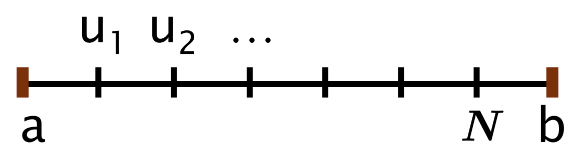
y方向向下

```
h = 1/20;
[x,y] = meshgrid(-1:h:1);
u = x.^2 + y.^2;
d = (4/h^2) * del2(u);
```

规则区域泊松方程快速解法

- Matrix eigen-decomposition
  Fast solver for 2-D region
  FFT based fast solver

规则区域Poisson方程求解



- 一维问题 $\triangle u = f(\vec{x})$
  - 中心差分格式

$$\triangle_h u(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} \approx f(x)$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{u} = h^2 \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}$$

记为矩阵T_N

回忆习题10.4, 矩阵

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

的特征值

  - 易知T_N的特征值为 $\lambda_k = -2 + 2\cos\theta_k,\ \theta_k = \dfrac{k\pi}{N+1},\quad k = 1, 2, \cdots, N$
  - 单位特征向量为 z_k，其元素

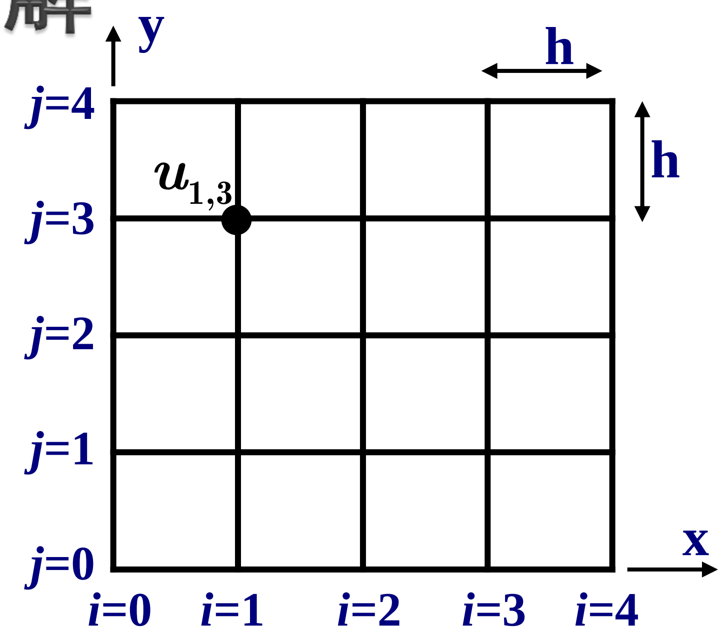
$$T_N = Z \Lambda Z^T \qquad z_k(j) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin\left(\frac{jk\pi}{N+1}\right)$$

规则区域Poisson方程求解

- 二维问题 $\triangle u = f(\vec{x})$

$$T_{N\times N}\cdot u = h^2 f$$

$$T_{N\times N} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
-4 & 1 & & 1 & & & & & \\
1 & -4 & 1 & & 1 & & & & \\
 & 1 & -4 & & & 1 & & & \\
\hline
1 & & & -4 & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 1 & -4 & 1 & & 1 & \\
 & & 1 & & 1 & -4 & & & 1 \\
\hline
 & & & 1 & & & -4 & 1 & \\
 & & & & 1 & & 1 & -4 & 1 \\
 & & & & & 1 & & 1 & -4
\end{array}\right)$$



变量按列分成N组

$$T_{N\times N} \equiv \begin{bmatrix} T_N\text{-}2I_N & I_N & & \\ I_N & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & I_N \\ & & I_N & T_N\text{-}2I_N \end{bmatrix}$$

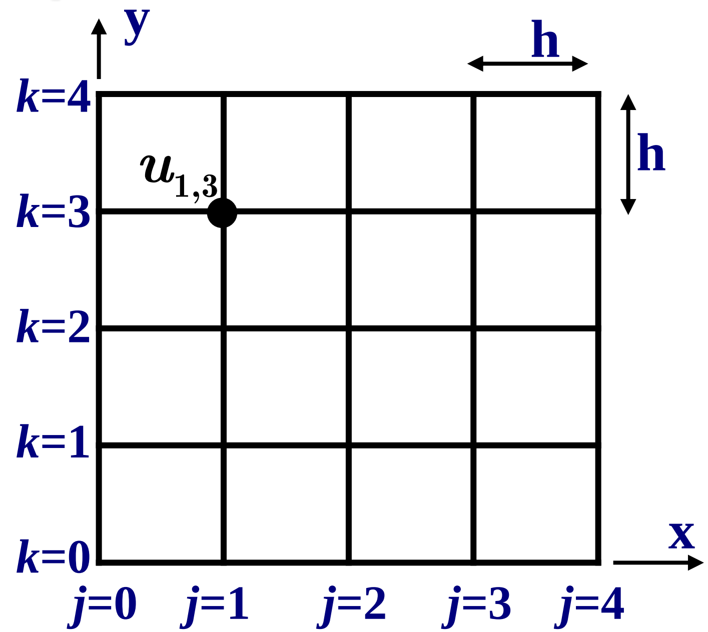
矩阵阶数: N^2, 直接解法 $\sim \mathcal{O}(N^4)$

规则区域Poisson方程求解

- 将矩阵方程写成另一种形式

$$-4u_{j,k} + u_{j-1,k} + u_{j+1,k} + u_{j,k-1} + u_{j,k+1} = h^2 f_{j,k}$$

$$1 \le j,k \le N$$



设$u_{j,k}$组成一个$N\times N$的矩阵U
(每行对应于一列网格点)

$$-2u_{j,k} + u_{j-1,k} + u_{j+1,k} = (T_N \cdot U)_{j,k}$$

$$-2u_{j,k} + u_{j,k-1} + u_{j,k+1} = (U \cdot T_N)_{j,k}$$

$$T_N \cdot U + U \cdot T_N = h^2 F$$

F为$f_{j,k}$组成的矩阵

$$T_N = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

规则区域Poisson方程求解

- 基于特征值分解的解法

$$T_N \cdot U + U \cdot T_N = h^2 F$$

将 $T_N = Z\Lambda Z^T$ 代入，左乘 Z^T 右乘 Z

$$Z^T(Z\Lambda Z^T)UZ + Z^T U(Z\Lambda Z^T)Z = Z^T(h^2 F)Z$$

$$\Lambda Z^T UZ + Z^T UZ\Lambda = h^2 Z^T FZ$$

$$\Lambda U' + U'\Lambda = h^2 F'\ ,$$ 设 $U' = Z^T UZ,\ F' = Z^T FZ$

解出 $u'_{jk} = \dfrac{h^2 f'_{jk}}{\lambda_j + \lambda_k}$

$1 \le j, k \le N$

算法:

计算量 $\sim \mathcal{O}(N^3)$

1) $F' = ZFZ$
2) For all j and k, $u'_{jk} = \dfrac{h^2 f'_{jk}}{\lambda_j + \lambda_k}$
3) $U = ZU'Z$

(Z矩阵对称)

规则区域Poisson方程求解

- 基于FFT的快速解法

在上一个算法中， $Z_{jk}=\sqrt{\dfrac{2}{N+1}}\sin\dfrac{jk\pi}{N+1},\quad 1\le j,k\le N$

考虑2*N*+2阶的旋转因子$\omega_{2N+2}=e^{-2\pi i/(2N+2)}$，对应DFT变换矩阵为：

$$\{F_{2N+2}\}_{jk}=\omega_{2N+2}^{jk}=\cos\frac{jk\pi}{N+1}-i\sin\frac{jk\pi}{N+1},\qquad 0\le j,k\le 2N+1$$

说明矩阵Z为DFT矩阵 F_{2N+2}的(2:N+1, 2:N+1)子矩阵的虚部的$\sqrt{\dfrac{2}{N+1}}$倍

算法:

$Z(ZF^T)^T$若干矩阵向量乘

1) $F'=ZFZ$

2) For all j and k, $u'_{jk}=\dfrac{h^2f_{jk}}{\lambda_j+\lambda_k}$

3) $U=ZU'Z$

计算 Zx $\begin{cases}\text{用零扩充}x\text{向量为2N+2维;}\\ \text{FFT}(x);\\ \text{结果的N分量虚部}\times\sqrt{\dfrac{2}{N+1}}\end{cases}$

计算量 ~ $\mathcal{O}(N^2 log_2 N)$

规则区域Poisson方程求解

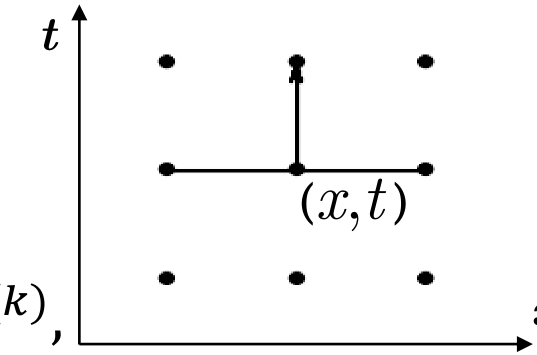
- 基于FFT的快速解法
  - 将计算复杂度由$O(N^4)$降为$O(N^2 \log N)$
  - 适合二、三维规则区域结构，均匀离散网格
  - 区域的边界条件也有一定的要求: 各个面为一种边界条件

数值稳定性

- Numerical stability

显式有限差分法的稳定性

沿时间轴逐步算出函数值



- 热方程的显式有限差分法
  - $$\frac{u(\vec{x},t+\delta)-u(\vec{x},t)}{\delta}=\Delta_h u(\vec{x},t)$$
  - 设时刻t_k，各空间离散点上u值组成向量$\boldsymbol{u}^{(k)}$，$t_k+\delta$的为$\boldsymbol{u}^{(k+1)}$，则得向量方程：

$$\sigma=\frac{\delta}{h^2}$$

$$\boldsymbol{u}^{(k+1)}=\boldsymbol{u}^{(k)}+\delta\boldsymbol{\Delta}_h\boldsymbol{u}^{(k)}=\boldsymbol{u}^{(k)}+\delta\frac{\boldsymbol{A}}{h^2}\boldsymbol{u}^{(k)}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{u}^{(k)}$$，其中$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{I}+\sigma\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2\end{pmatrix}$$

  - 一维空间，M对角元为1−2σ，行元素之和≤1
  - 二维空间，M对角元为1−4σ，行元素之和≤1
  - 若M对角元≥0，$\|\boldsymbol{M}\|_\infty=1$ （设1− σ ≥−1，即σ ≤2）

$$\boldsymbol{u}^{(k+1)}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{u}^{(k)} \Rightarrow \left\|\Delta\boldsymbol{u}^{(k+1)}\right\|\le\|\boldsymbol{M}\|\left\|\Delta\boldsymbol{u}^{(k)}\right\|=\left\|\Delta\boldsymbol{u}^{(k)}\right\|$$ 稳定！

  - 若M有对角元<0，则$\|\boldsymbol{M}\|_\infty>1$，误差逐步放大 不稳定！

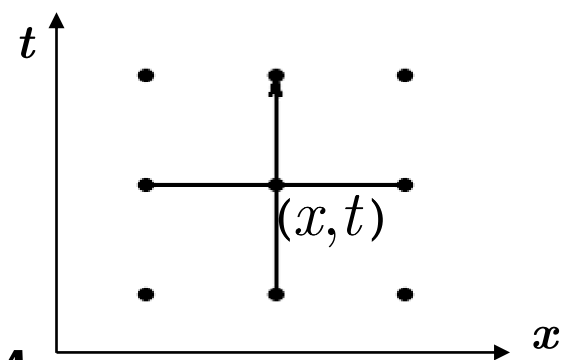
对一般的二维离散、三维问题，可类似推导！

显式有限差分法的稳定性

- 热方程的显式有限差分法
  - 稳定条件是对角元1−2σ, 或1−4σ ≥0
  - 一维: $\sigma=\dfrac{\delta}{h^2}$≤1/2, 二维: $\sigma=\dfrac{\delta}{h^2}$≤1/4
  - 即得到对时间步长的限制: $\delta \le h^2/2$, 或$\delta \le h^2/4$

显格式算法的
时间步不能太大!

- 波方程的显式有限差分法



$$\frac{u(\vec{x},t+\delta)-2u(\vec{x},t)+u(\vec{x},t-\delta)}{\delta^2}=\triangle_h u(\vec{x},t)$$

$$\Rightarrow\quad u^{(k+1)}=2u^{(k)}-u^{(k-1)}+\sigma A u^{(k)}$$

$\dfrac{\delta^2}{h^2}$

$$\Rightarrow\quad \boldsymbol{u}^{(k+1)}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{u}^{(k)}-\boldsymbol{u}^{(k-1)},\ \boldsymbol{M}=2\boldsymbol{I}+\sigma\boldsymbol{A}$$

  - 类似前面分析, M的对角元为2−2σ (一维), 或2−4σ (二维)
  - 若对角元≥0, 则$\|\boldsymbol{M}\|_\infty=2$, 可证明算法稳定
  - 稳定性对时间步长的要求: $\delta \le h$, 或$\delta \le h/\sqrt{2}$

显式有限差分法的稳定性

- 有关稳定性的更多讨论
  - 为保证显式有限差分的计算稳定，不能取大的时间步长
  - 热方程的稳定性条件较波方程更苛刻：$\delta \le h^2/4$ vs. $\delta \le h/\sqrt{2}$
  - 这些稳定性条件也叫CFL条件(by Courant, Friedrichs, Lewy)，他们1928年的论文从"依赖域"的角度阐述了这些条件
  - 若采用隐式差分公式(回忆ODE)，每个时间步内求解线性方程组，但时间步长可以取得较大(稳定性好)
- 演示程序pdegui
  - 各种二维区域([-1, 1]范围内)，三种方程：
  - 可选择差分网格的h,及 $\sigma=\delta/h^2$
  - 对热方程与波方程，观察稳定性
    $(\sigma\le 1/4)$ $(\sigma\le 1/2)$

泊松方程：$\Delta u=-1$

热方程：$\dfrac{\partial u}{\partial t}=\Delta u+1$

波方程：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Delta u$

(热方程的解不会稳定住)

L型区域的波方程

- Wave equation for the L region

L型区域的波方程

- 零边值波方程的分离变量法

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u(\vec{x},t)}{\partial t^2} = \Delta u(\vec{x},t) \\ u(\vec{x},0) = u_0(\vec{x}),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},0) = 0\end{cases}$$

，考察 $u(\vec{x},t) = \cos\left(\sqrt{\lambda}\,t\right)\, v(\vec{x})$ 的情况

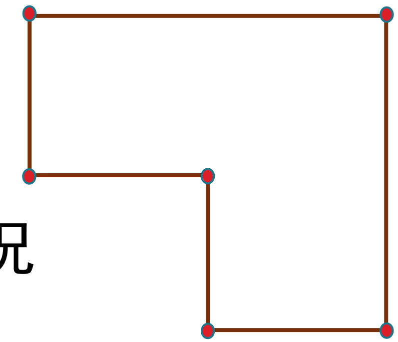
可验证它满足第2个初始条件

  - 代入微分方程得$v(\vec{x})$满足的方程为$\triangle v + \lambda v = 0$
  - 若u满足全0的边界条件，则v也满足全0的边界条件
  - 非零解函数$v(\vec{x})$为特征函数，对应λ称为特征值 (λ也待定)
  - 一维情况$v''(x)+\lambda v(x)=0$, [a, b]上的解为: $v_k(x)=\sin(k\pi\dfrac{x-a}{b-a})$
  - 对应$\lambda_k=(k\pi/(b-a))^2$；若定义域为[0,π], $v_k(x)=\sin(kx)$
  - 特征函数的线性组合仍满足PDE, $u(\vec{x},t) = \sum_k a_k \cos\left(\sqrt{\lambda_k}\,t\right)\, v_k(x)$
  - 根据第1个初始条件，解组合系数，
  - 变为求$u_0(x)$的正弦级数

$$u_0(x) = \sum_k a_k \sin(kx)$$

(k为任意整数) (定义域[0,π])

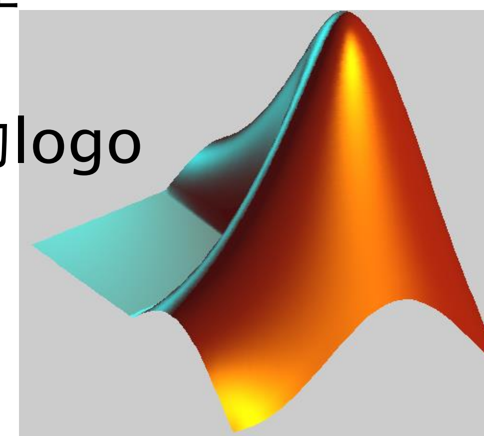
L型区域的波方程



- 二维L型区域

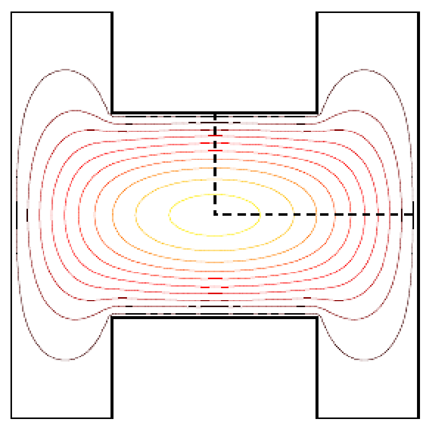
$$\triangle v + \lambda v = 0$$

  - 分离变量法(求空域上特征函数v), 可推广到二维情况
  - L型区域虽然简单, 但波动方程无解析解, 且在凹角处有奇异性(梯度无界, 薄膜产生裂缝)
  - 分离变量法中的特征函数$v_1(\vec{x})$成为Matlab的logo
  - L型区域波问题的实际背景: 压住1/4在风中的毛巾; L形手鼓; 脊形微波波导



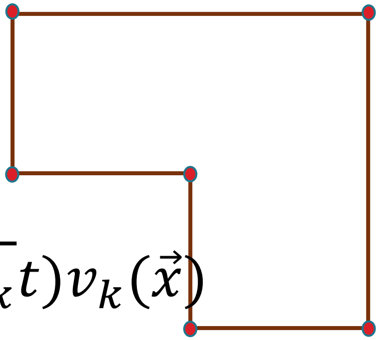
(边缘弯曲效果)

波导—同轴线适配器



电场等位线

L型区域的波方程



- 求解L型区域的波方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u(\vec{x},t)}{\partial t^2} = \Delta u(\vec{x},t) \\ u(\vec{x},0) = u_0(\vec{x}),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},0) = 0\end{cases}\text{，解为}u(\vec{x},t) = \sum_k a_k \cos(\sqrt{\lambda_k}t)v_k(\vec{x})$$

  - 特征函数仍然满足方程 $\Delta v(\vec{x}) + \lambda v(\vec{x}) = 0$
  - 可用有限差分法转化为求解矩阵特征值

$$\frac{\boldsymbol{A}}{h^2}\boldsymbol{v} + \lambda\boldsymbol{v} = 0 \Longrightarrow -\frac{\boldsymbol{A}}{h^2}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$$

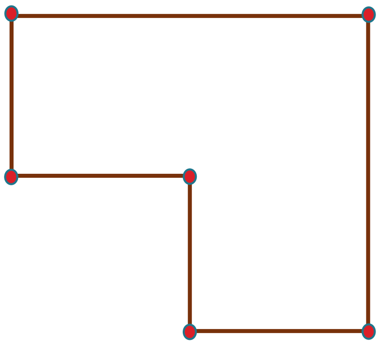
```
m=200; h = 1/m;
A=delsq(numgrid('L', 2*m+1))/h^2;
[V, D]= eigs(A, 6, 0);
```

  - 得到特征值与离散的$\{v_k(\vec{x})\}$，
    实际上可取部分特征值(较小的)与特征函数来近似$u(\vec{x},t)$
  - 利用初始条件，$u_0(\vec{x}) = \sum_k a_k v_k(\vec{x})$，再用线性最小二乘法可求系数$\{a_k\}$

L型区域的波方程

- 求解L型区域的波方程

```
m=200; h = 1/m;
A=delsq(numgrid('L', 2*m+1))/h^2;
[V, D]= eigs(A, 6, 0);
```



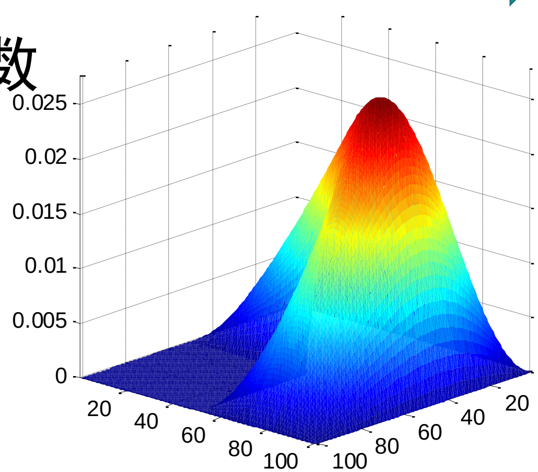
最接近0的6个，按从大到小排列

- 网格点数目达119201，常规的eig无法解(内存不够)
- 所以用eigs. 结果为

9.64147
15.19694
19.73880
29.52033
31.91583
41.47510

- 画出第1个特征值对应的特征函数

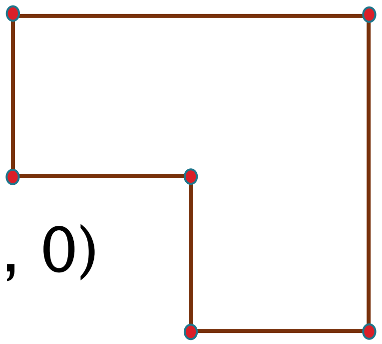
```
n= 2*m+1;
Grid= numgrid('L', n);
pos= find(Grid);
data(pos)= V(Grid(pos), 6);
surf(-data, 'LineStyle', 'none');
```



详见myMembrane.m

Matlab的logo源于它

L型区域的波方程



- 求解L型区域的波方程
  - 上述计算采用的是数值方法: lambda=eigs(A, 6, 0)

只有3, 4位准确的有效数字, 误差大是由于奇异点的存在

lambda =	准确值
9.64147	9.63972
15.19694	15.19725
19.73880	19.73921
29.52033	29.52148
31.91583	31.91264
41.47510	41.47451

解析加数值计算更准确

```
for k=1:6,
  [L, lambda(k)]=membranetx(k);
end;
```

  - membranetx是Matlab程序membrane的简化版(可输出特征值)
  - membrane用解析加数值方法计算L型区域波方程的特征函数, 使用了分数阶贝塞耳函数做基函数做最小二乘拟合, 比较复杂; 但准确度高 (含边缘弯曲效果的处理)

详见课本

前3个特征函数常作Matlab的logo

```
membrane(1)
membrane(2)
membrane(3)
```

Matlab topics

- Matlab commands for PDE 一维空间的抛物型, 椭圆型方程
  - pdepe (Solve initial-boundary value problems for parabolic-elliptic PDEs in 1-D)
  - Syntax: sol =pdepe(m,pdefun,icfun,bcfun,xmesh,tspan)
  - m表示定义域类型: 长条形(0), 圆柱对称(1), 球对称(2)
  - PDE方程: $c\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial t} = x^{-m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right) + s\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)$
  - pdefun: [c,f,s] = pdefun(x, t, u, dudx)
  - bcfun: $p(x,t,u) + q(x,t) f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$
  - Demo $u_t = u_{xx},\quad t \ge 0,\quad u(0,x) = \sin x$

c为对角阵, 其余向量

热传导问题: **pde_1.m**

□PDE Toolbox: 2-D FEM方法