

三维互连阻抗的混合边界积分方程提取算法

巩方¹⁾ 喻文健¹⁾ 严昌浩²⁾ 王泽毅¹⁾

¹⁾ (清华大学计算机科学与技术系 北京 100084)

²⁾ (复旦大学专用集成电路与系统国家重点实验室 上海 201203)

(gongf05@mails.tsinghua.edu.cn)

摘要 基于混合边界元三维互连阻抗提取方法,针对其离散线性方程组的特点,提出有效的稀疏矩阵组织和矩阵行列调整技术,以及一种预条件迭代求解技术,这些技术结合起来形成了一种有效的三维互连阻抗提取算法.该算法在保证计算精度的同时,速度优于 MIT 最新的提取算法 FastImp.最后通过 2 个典型互连结构的数值实验验证了该算法的有效性.

关键词 边界元方法;阻抗提取;FastImp;混合边界元方法;广义极小残差算法;预条件
中图分类号 TN47

An Algorithm Based on Mixed Boundary Element Integral Formulations for Extracting Frequency-Dependent Impedances of 3D VLSI Interconnects

Gong Fang¹⁾ Yu Wenjian¹⁾ Yan Changhao²⁾ Wang Zeyi¹⁾

¹⁾ (Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University, Beijing 100084)

²⁾ (State Key Laboratory of ASIC & System, Fudan University, Shanghai 201203)

Abstract Based on the mixed boundary element method, this paper proposes several techniques for 3D impedance extraction, including an efficient organization and row-column adjustment of the sparse coefficient matrix, and a pre-conditioned iterative equation solver. A fast impedance extractor is formed with these techniques. The proposed method has faster speed than the newly-developed FastImp by MIT, while preserving high accuracy. Numerical experiments on two typical interconnect structures verify the efficiency of this method.

Key words boundary element method; impedance extraction; FastImp; mixed boundary element method; generalized minimal residual (GMRES); pre-condition

在高性能 GHz 深亚微米 VLSI 设计中,需精确地模拟和验证频变三维互连电感效应.目前,三维电感提取的数值方法可大致分为体积元法和边界元法 2 类.

Ruehli 在 1974 年提出的 (partial element equivalent circuit, PEEC) 模型^[1]属于体积元法.基于简化 PEEC 模型的电感提取软件 FastHenry^[2]目前被广泛应用.

然而, FastHenry 电感提取软件存在明显不足: 1) 引入轴向电流假设,并将导体沿截面离散成一些电流均匀分布的导体细丝,则在处理电流严重不均匀分布的甚高频时需划分大量细丝,显著地增加了计算量; 2) 难以处理由于高频涡流效应引起的复杂电流方向情况(如大块衬底导体内的电流分布); 3) 仅能进行磁准静态(magneto-quasistatic, MQS)分析,不

收稿日期 2007-01-01; 修回日期 2007-03-15. 基金项目:国家自然科学基金(90407004, 60401010). 巩方,男,1984 年生,硕士研究生,主要研究方向为 VLSI 互连寄生阻抗提取. 喻文健,男,1977 年生,博士,助理研究员,主要研究方向为 VLSI 互连寄生参数提取、三维边界元快速算法与应用、互连线建模与分析等. 严昌浩,男,1974 年生,博士,主要研究方向为 VLSI 互连寄生参数提取. 王泽毅,男,1940 年生,教授,博士生导师,主要研究方向为 VLSI CAD 中的器件模拟、互连寄生参数提取与分析及其中的串并行数值方法.

能进行更为准确的电磁准静态(electro-magneto-quasistatic , EMQS)或全波模拟. 1999 年 ,Wang 等提出了一种基于直接边界元法的电感提取方法^[3-4] ,经过随后的数值算法改进 ,该方法形成了一个软件原型 FastImp^[5] . 与 FastHenry 相比 ,此边界元提取算法除了拥有将问题维度由三维降为二维这一边界元法所共有的优点外 ,还能适用于 EMQS 模拟和全波分析. 在大致相同精度情形下 ,它比 FastHenry 快 2~3 倍(低频下)到几十倍(高频下)不等^[3] . 在这个直接边界元电感提取方法中 ,离散变量数约为 $7p$ (MQS 假设) ,其中 p 为导体面元数目.

最近 ,Yan 等^[6]提出了一种新的混合边界元电感提取方法. 在导体区域 ,它通过表面分布的虚拟偶极子源产生双层位势以表达导体内电场 ,属于间接边界积分方程(boundary integral equation , BIE) ;而在导体以外的介质区域 ,则采用文献 [3] 所应用的直接边界积分方程表达电场. 这种混合的边界积分方程方法在保持文献 [3] 方法能适应 MQS ,EMQS 和全波模拟的同时 ,还可将总变量数从约 $7p$ 减少为 $4p$ (MQS 假设下) ,因此仅需求解一个规模较小的线性方程组 ,这有利于提高计算速度. 但是 ,文献 [6] 仅限于模型建立和正确性的初步验证 ,不能有效地处理形成混合法方程组时需额外做的矩阵运算 ,以及如何有效地求解线性方程组的问题.

基于文献 [6] 的混合边界元法 ,本文提出几项技

术来改进其线性方程组的形成和求解. 首先用十字链表的数据结构存储方程组形成所涉及的几个稀疏矩阵 ,并相应地简化矩阵相乘运算 ,从而大大地减少了所需额外矩阵运算时间 ;其次 ,对整体系数矩阵作适当的行列调整 ,以利于 GMRES 迭代求解更快地收敛 ;最后 ,针对混合边界元法方程组分块稠密的特点 ,提出一种高效的预条件方法 ,使得 GMRES 迭代求解快速地收敛. 通过对 2 个典型互连结构的计算以及与 FastImp 的比较 ,验证了本文算法的正确性和稳定性. 数值结果表明 ,本文算法的计算时间小于 FastImp ,同时克服了 FastImp 在提取低频电感时不够准确的缺点^[7] .

1 边界元阻抗提取方法

本节简要介绍直接边界元法和混合边界元法 2 种电感提取计算模型.

1.1 直接边界元模型

文献 [3] 提出了一组能适用于 MQS ,EMQS 和全波分析 ,并能进行宽频范围电感提取的 BIE. 为简单起见 ,下面仅讨论 MQS 假设 ,并将微分方程和由之转化得到的 BIE 以及边界条件总结在表 1 中^[6] . 其中 , E 为电场矢量 , φ 为标量电位 , E_t 为局部坐标系下电场的切向分量 , A 为矢量磁位 ; μ 和 σ 分别为磁导率和电导率 ,均为常数.

表 1 直接边界元电感提取模型中主要的微分和积分方程

	场域微分方程	边界积分方程或边界条件
每一导体内	$\nabla^2 E - i\omega\mu\sigma E = 0$ (1)	$\int_C G_0(y, x) \frac{\partial E(x)}{\partial n_x} dx - \int \frac{\partial G_0(y, x)}{\partial n_x} E(x) dx = \frac{1}{2} E(y)$ (2)
	$\nabla \cdot E = 0$ (3)	$\int_C E_t(x) \cdot (n(x) \times k(x)) dx - \int_a \frac{\partial E_n(y)}{\partial n(y)} dy = 0$ (4)
导体间介质	$\begin{cases} \nabla^2 E = i\omega\mu J \\ -\Delta\varphi = E + i\omega A \\ A = \int \mu G_0(y, x) J dx \end{cases}$ (5)	$\int_S G_0(y, x) \frac{\partial E(x)}{\partial n_x} dx - \int_S \frac{\partial G_0(y, x)}{\partial n_x} E(x) dx + \nabla\varphi(y) = 0$ (6)
非 contact 面		$E_n(y) = 0$ (7)
导体 contact 面		$\begin{cases} \varphi(y) = constant \\ E_t(y) = 0 \\ \frac{\partial E_n(y)}{\partial n_y} = 0 \end{cases}$ (8)

在各导体内 ,将式(1)转化到式(2)时 ,采用了 Helmholtz 复值基本解 ,即 $G_1(y, x) = \frac{e^{ikr(y, x)}}{4\pi r(y, x)}$, $k = -\sqrt{-i\omega\mu\sigma}$. 其中 , y 为评价点 , x 为表面积分点 , $r(y, x)$ 是这 2 个点之间的欧氏距离. 式(5)和

相应的式(6)是另外一组重要方程 ,它们描述了导体间介质区域内的电场分布情况. 式(6)中的积分核 G_0 和 $\partial G_0/\partial n$ 是 Laplace 方程基本解及其法向导数.

1.2 混合边界元模型

文献 [6] 在直接边界元基础上 ,提出一种混合

边界元方法. 该方法与直接边界元模型的区别主要在于, 导体内的矢量 Helmholtz 方程(1)并不转化为直接边界积分方程(2), 而是在直角坐标系中将矢量 Helmholtz 方程(1)分解为 3 个独立的标量 Helmholtz 方程, 并应用势论方法予以转化. 不失一般性, 下面仅以 \hat{x} 坐标方向上的方程加以说明:

$$\nabla^2 E_x - i\omega\mu\sigma E_x = 0 \quad (9)$$

设导体 i 所在区域为单连通域 Ω_i^- , 内边界为 Γ_i^- . 在 Γ_i^- 上设置虚拟偶极子分布 $\mu_x(x)$, 且该偶极子的轴向平行于点 x 处的单位外法向 $\hat{n}(x)$, 如图 1 所示. 由位势理论^[8]知, 对区域 Ω_i^- 内任一评价点 y , 其在 \hat{x} 方向的场强 $E_x(y)$ 可由虚拟偶极子源产生的双层位势表达, 即

$$E_x(y) = \int_{\Gamma_i^-} \frac{\partial G_1(y, \kappa x)}{\partial n(x)} \mu_x(x) \kappa dS_x \quad (10)$$

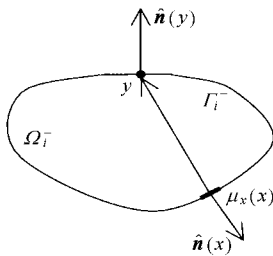


图 1 导体中双层位势示意图

进一步, 若假定 $E_x(y)$ 在 y 点处可微, 可得到

$$\frac{\partial E_x(y)}{\partial n(y)} = \frac{\partial}{\partial n(y)} \left[\int_{\Gamma_i^-} \frac{\partial G_1(y, \kappa x)}{\partial n(x)} \mu_x(x) \kappa dS_x \right] \quad (11)$$

其中 $\hat{n}(y)$ 定义为点 y 处任一方向的单位向量.

当点 y 移动到内边界 Γ_i^- 上时, 式(10)(11)变为间接 BIE, $\hat{n}(y)$ 定义为边界点 y 处的单位外法向量. 需要注意的是, 当评价点 y 与积分点 x 重合时核函数奇异, 因此, 式(10)(11)为含不同奇性的奇异积分.

类似地, 若在边界 Γ_i^- 上引入另外 2 个偶极子分布 $\mu_y(x)$ 和 $\mu_z(x)$, 在 \hat{y} 和 \hat{z} 坐标方向上的微分方程也能分别被转化为间接 BIE

$$\begin{cases} E_x(y) = \int_{\Gamma_i^-} \frac{\partial G_1(y, \kappa x)}{\partial n(x)} \mu_x(x) \kappa dS_x \\ E_y(y) = \int_{\Gamma_i^-} \frac{\partial G_1(y, \kappa x)}{\partial n(x)} \mu_y(x) \kappa dS_x \\ \frac{\partial E_x(y)}{\partial n(y)} = \frac{\partial}{\partial n(y)} \left[\int_{\Gamma_i^-} \frac{\partial G_1(y, \kappa x)}{\partial n(x)} \mu_x(x) \kappa dS_x \right] \\ \frac{\partial E_y(y)}{\partial n(y)} = \frac{\partial}{\partial n(y)} \left[\int_{\Gamma_i^-} \frac{\partial G_1(y, \kappa x)}{\partial n(x)} \mu_y(x) \kappa dS_x \right] \end{cases} \quad (12)$$

得到 E 和 $\partial E/\partial n$ 的间接积分表达式后, 即式

(10)~(12), 将它们代入式(4)(6)以及式(7)(8)中, 就得到一组可用于离散化求解的混合 BIE. 这里“混合”的含义是指, 在每个导体内采用的是间接 BIE, 而在所有导体间(介质中)利用的却仍是 FastImp 中的直接 BIE. 图 2 描述了混合边界元模型离散和未知变量分布, 其中未知变量 μ 代表 (μ_x, μ_y, μ_z) . 与 FastImp 的离散情况(每个面元包含未知量 E 和 $\partial E/\partial n$)相比, 它能将每个面元上未知变量数从 6 个降为 3 个(MQS 假设下). 因此, 混合边界元法已将未知数目从直接法中的 $6p + v$ 降低为 $3p + v$ (v 为面元顶点数).

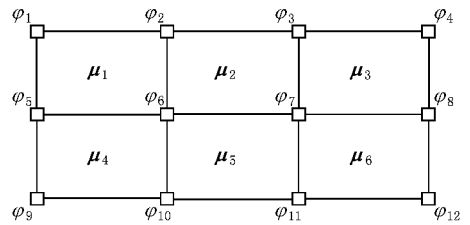


图 2 混合边界元离散和未知变量分布图

采用混合边界元法后, 整体线性方程组可表示为^①

$$\begin{bmatrix} T_{1x}Q_1 & T_{1y}Q_1 & T_{1z}Q_1 & A_{11} \\ T_{2x}Q_1 & T_{2y}Q_1 & T_{2z}Q_1 & A_{12} \\ N_{ncx}D_1 & N_{ncy}D_1 & N_{ncz}D_1 & 0 \\ T_{1x}D_1 & T_{1y}D_1 & T_{1z}D_1 & 0 \\ T_{2x}D_1 & T_{2y}D_1 & T_{2z}D_1 & 0 \\ N_{cx}D_2 & N_{cy}D_2 & N_{cz}D_2 & 0 \\ Q_{2x} & Q_{2y} & Q_{2z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \\ \mu_z \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{cases} Q_1 = P_0 D_2 - D_0 D_1 \\ Q_{2\alpha} = C_{d\alpha} D_2 + C_\alpha D_1, \alpha \text{ 为 } x, y, z \end{cases} \quad (14)$$

其中, $T_{1\alpha}$ 和 $T_{2\alpha}$ ($\alpha = x, y, z$) 为根据 2 组面元切向量得到的对角阵, 其对角元素分别为单位切向量的 x, y, z 坐标; A_{11} 和 A_{12} 分别为 2 个有限差格式对应的矩阵; N_{nca} ($\alpha = x, y, z$) 为非 contact 面元的单位法向量 x, y, z 坐标形成的对角阵, 而 N_{ca} ($\alpha = x, y, z$) 为 contact 面元单位法向量 x, y, z 坐标形成的对角阵; C_α 和 $C_{d\alpha}$ ($\alpha = x, y, z$) 为表面电流守恒方程中 $\partial E_\alpha/\partial n$ 和 E_α ($\alpha = x, y, z$) 的系数形成的矩阵, I_c 为单位阵^[4].

① 文献[1]中的式(15)存在错误, 准确的方程组表达应为本文的式(13)

式(13)中的 D_2, D_1, P_0 和 D_0 为离散 BIE 系数组成的矩阵, 其元素的计算公式为

$$\begin{cases} P_0(a, b) = \int_{panel_b} \frac{1}{4\pi r(y_a, x)} dx \\ D_0(a, b) = \int_{panel_b} \frac{\partial}{\partial n_x} \left[\frac{1}{4\pi r(y_a, x)} \right] dx \\ D_1(a, b) = \int_{panel_b} \frac{\partial}{\partial n_x} \left[\frac{e^{ikr(y_a, x)}}{4\pi r(y_a, x)} \right] dx \\ D_2(a, b) = \frac{\partial}{\partial n(y_a)} \left[\int_{panel_b} \frac{\partial}{\partial n_x} \left[\frac{e^{-ikr(y_a, x)}}{4\pi r(y_a, x)} \right] dx \right] \end{cases}$$

其中 a, b 是面元的索引号, $panel_b$ 为第 b 个面元, y_a 为第 a 个面元的配置点. 式(13)中其他的非零矩阵块均为仅依赖导体表面几何形状的稀疏矩阵. 因此, 求解系数矩阵 A 的大部分时间都消耗在计算形成矩阵 D_2, D_1, P_0 和 D_0 所需的边界积分, 以及与计算 Q_1 和 Q_{2a} 相关的额外矩阵乘法中.

当 $a = b$ 时, 计算 D_2 涉及到超奇异积分, 若采用普通的二维 Gauss 积分公式, 即使取相当多的高斯点, 也难以准确计算. 本文采用文献[9]中提出的积分方法计算该超奇异积分, 即将它等价于一个单重积分和一个二重积分的和.

混合边界元法中的虚拟偶极子源并无确切的物理含义, 它们的引入来自位势理论^[8]. 因此, 混合边界元法和直接法之间的主要差别在于采用了不同 BIE 表达导体内由矢量 Helmholtz 方程所描述的电场.

2 方程组形成与预条件技术

混合边界元模型虽然变量数少, 但与文献[4]中的直接法相比, 它在形成方程组过程中需进行额外的矩阵乘操作, 即计算式(14)中的 Q_1 和 Q_{2a} 矩阵. 因此, 有效地减少额外矩阵乘时间并提出快速方程求解算法, 才能使混合边界元法成为有实用价值的快速提取算法.

2.1 减少额外矩阵乘的时间

计算矩阵 Q_1 涉及到数个矩阵相乘, 若不加区别地按稠密矩阵处理, 形成 Q_1 矩阵的时间约占方程组形成总时间的 85%. 因此, 处理好相应的矩阵乘运算是实现混合边界元快速电感提取的关键.

事实上, 我们可对矩阵 D_2, D_1, P_0 和 D_0 的稀疏性加以分析. 具体地, 由于 P_0 和 D_0 产生于导体间的介质方程(6), 它们是完全的满阵, 而 D_2 和 D_1 由导体内方程得出, 因此在多导体情况下为分块稠密矩

阵. 以 D_1 为例, 单根直导体时, D_1 是一个满阵, 而对 4 根交叉导体的结构则呈现如图 3 所示的 4 对角块稠密矩阵的结构. 对于含 m 根导体的结构, 利用这种分块矩阵的特点大致可将矩阵乘 $P_0 D_2$ 和 $D_0 D_1$ 的时间降低为满阵情况下的 $1/m$.

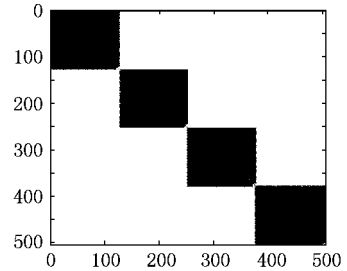


图 3 4 根交叉导体 D_1 矩阵元素分布示意图

其次, 由于大量矩阵元素的计算多表现为法向导数的边界积分, 矩阵 D_0, D_1 和 D_2 的稠密块中仍存在一些零元素, 可采用十字链表的稀疏矩阵存储结构加以处理. 基于双向十字链表的存储结构可实现快速的矩阵乘法操作, 进一步减少时间开销.

此外, 矩阵 P_0 和 D_0 的元素均为实数, 而矩阵 D_2 和 D_1 的元素为复数, 它们之间的乘法若全部采用复数数据类型实现效果较差. 实验表明, 一次复数乘法的时间大约是实数乘法的 6 倍. 因此, 我们将矩阵 D_2 和 D_1 元素的实部及虚部分别与 P_0 和 D_0 中的实数元素相乘, 可进一步减少额外矩阵乘的时间.

表 2 所示为采用上述技术后计算 2 个例子中额外矩阵乘的时间情况. 由于单直导体的 $P_0 D_2$ 和 $D_0 D_1$ 运算涉及的都是较为稠密的矩阵乘, 而改进后可将复数乘法分解为实数的乘法, 大大减少了时间. 而对于 4 根交叉导体, 稀疏矩阵的特点较为明显, 加速后额外矩阵乘的时间小于原来的 $1/4$.

表 2 矩阵稀疏化等技术使用前后额外矩阵乘时间 t_s

矩阵乘的时间	单直导体	4 根交叉导体
改进前	4.97	150.7
改进后	2.42	33.06

2.2 系数矩阵行列调整

仔细分析式(13), 它的第 1, 2 行对应式(6), 第 3 行为式(7), 第 4, 5 行为式(8)中的 $E_i(y) = 0$, 第 6, 第 8 行分别对应式(8)中的 $\partial E_n(y) / \partial n_y = 0$ 和 $\varphi(y) = constant$, 第 7 行对应式(4). 因此, 整个系数矩阵的非零元素分布如图 4 所示(对单导体结构).

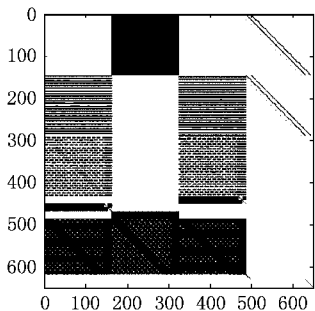


图 4 系数阵行列调整前非零元素分布示意图

从图 4 看出,系数阵对角线上存在大量的零元素,不利于 GMRES 迭代求解的收敛,从而通过矩阵行列元素调整来加速迭代求解的收敛速度.具体地,将式(13)中矩阵的第 2 行与第 7 行交换位置,再将第 1 列与第 2 列交换位置,未知变量和方程右端项也作相应调整.这样可得到方程组为

$$\begin{pmatrix} T_{1y}Q_1 & T_{1x}Q_1 & T_{1z}Q_1 & A_{t1} \\ Q_{2y} & Q_{2x} & Q_{2z} & 0 \\ N_{ncy}D_1 & N_{ncx}D_1 & N_{ncz}D_1 & 0 \\ T_{1y}D_1 & T_{1x}D_1 & T_{1z}D_1 & 0 \\ T_{2y}D_1 & T_{2x}D_1 & T_{2z}D_1 & 0 \\ N_{cy}D_2 & N_{cx}D_2 & N_{cz}D_2 & 0 \\ T_{2y}Q_1 & T_{2x}Q_1 & T_{2z}Q_1 & A_{t2} \\ 0 & 0 & 0 & I_c \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mu_y \\ \mu_x \\ \mu_z \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_6 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_1 \\ b_7 \end{bmatrix} \tag{15}$$

这种行列调整基本保证了矩阵对角块是非零元素,图 5 所示为行列调整后的非零元素分布图.进一步的实验表明,采用 GMRES 迭代求解时,矩阵经行列调整后的迭代次数有明显的减少,如表 3 所示.

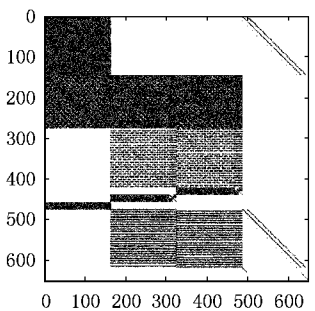


图 5 行列调整后系数矩阵非零元素分布示意图

表 3 方程组系数阵行列调整前后 GMRES 迭代情况

GMRES 迭代次数	单直导体	4 根交叉导体
未调整	9	22
调整后	7	15

2.3 预条件技术

预条件技术的应用关系到 GMRES 收敛与否以及速度快慢,本文基于对角线预条件的思想构造了一个预条件矩阵,其对应于式(15)的结构为

$$\begin{pmatrix} T_{1y}Q_1 & T_{1x}Q_1 & T_{1z}Q_1 & A_{t1} \\ Q'_{2y} & Q'_{2x} & Q'_{2z} & 0 \\ N_{ncy}D_1^* & N_{ncx}D_1^* & N_{ncz}D_1^* & 0 \\ T_{1y}D_1^* & T_{1x}D_1^* & T_{1z}D_1^* & 0 \\ T_{2y}D_1^* & T_{2x}D_1^* & T_{2z}D_1^* & 0 \\ N_{cy}D_2^* & N_{cx}D_2^* & N_{cz}D_2^* & 0 \\ T_{2y}Q_1 & T_{2x}Q_1 & T_{2z}Q_1 & A_{t2} \\ 0 & 0 & 0 & I_c \end{pmatrix}$$

$$Q_1 = P_0 D_2 - D_0 D_1,$$

$$Q'_{2\alpha} = C_{da} D_2^* + C_a D_1^*, \alpha \text{ 为 } x, y, z.$$

其中,*号表示取相应矩阵的对角矩阵,第 1 行和第 7 行可以直接从已生成的方程组系数矩阵中复制过来,不需要重复计算矩阵乘 $P_0 D_2$ 和 $D_0 D_1$;对其余的行,则只需用 D_1, D_2 的对角元素代入并计算,时间代价很小.此预条件矩阵的非零元素分布如图 6 所示.

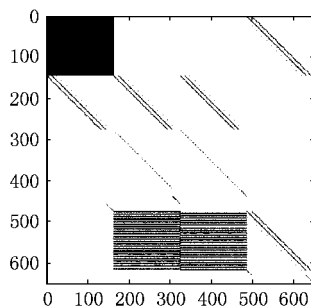


图 6 预条件矩阵非零元素分布示意图

记这个预条件矩阵为 M .采用右预条件,求解 $Ax = b$ 变为 $x = M^{-1}y$ 和 $AM^{-1}y = b$.

由于需多次求解系数矩阵为 M 的方程,可先对其进行 LU 分解(第 2.2 节介绍的矩阵行列调整技术使得 LU 分解能顺利进行);然后采用带预条件的 GMRES 算法求解该方程.实验结果表明,此预条件构造简单,同时能有效地减少迭代次数.对于变元数为 650 的方程组,求解过程仅需迭代 3 次便收敛,而当变元数为 2024 时,迭代次数也只有 9 次.

3 数值结果

我们用 C++ 语言实现了混合边界法(mixed

boundary element method, MBEM), 并将其与 FastImp^[10] 进行比较. 数值实验中均采用 MQS 假设以及带预条件的 GMRES 迭代求解方法, 所有实验均在主频 3 GHz 的 Linux 平台上进行. 当频率 $f \geq 10$ GHz 时, 后处理中计算导体电流的方法切换到高频电流计算模式^[3].

3.1 单直导体

单直导体的几何尺寸为 $1 \mu\text{m} \times 1 \mu\text{m} \times 4 \mu\text{m}$, 导体侧面离散为 $3 \times 3 \times 12$ 个面元, 如图 7 所示. 为说明精度, 引入电感提取软件 FastHenry 的结果进行比较.

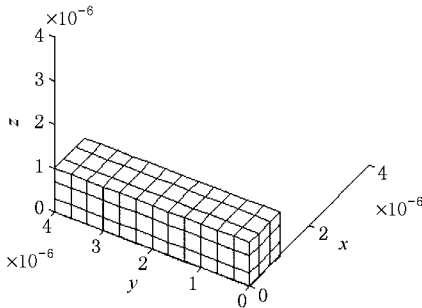


图 7 单直导体离散示意图

图 8, 9 所示为 3 种方法的频变电阻和电感曲线, 其中横轴坐标单位为频率的对数. 图 8 中, 在 $10^4 \text{ Hz} \sim 10^{11} \text{ Hz}$ 的频率范围内, 3 种方法提取出的电阻值都一致, MBEM 的结果与 FastHenry 的误差小于 3%. 在图 9 中, MBEM 的电感值相对于 FastHenry 结果的误差小于 3%. 而在较低的频率范围 ($10^4 \text{ Hz} \sim 10^6 \text{ Hz}$) 内, FastImp 的计算结果明显偏小, 这反映了 FastImp 在低频情况下误差较大的现象^[7]. 当频率 $f = 100 \text{ GHz}$ 时, 此结构中导体的趋肤深度为 $\delta = 0.2 \mu\text{m}$, 远小于导体横截面尺寸 $1 \mu\text{m}$, 因此趋肤效应显著. 对本算例的计算结果表明, 混合边界积分方程法能准确地处理发生趋肤效应的情况.

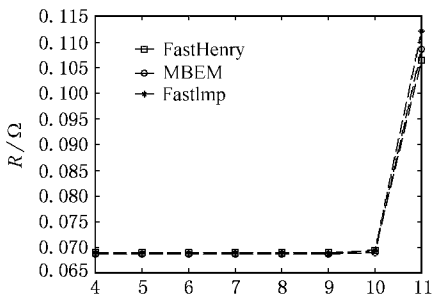


图 8 单直导体频变电阻曲线

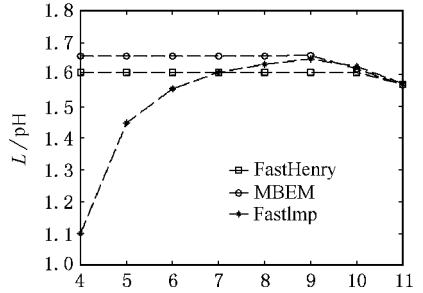


图 9 单直导体频变电感曲线

3.2 Bus2x2 结构

此算例来自 FastImp 程序包中名为“Bus2x2”的算例^[10], 其尺寸及表面离散情况由图 10 所示.

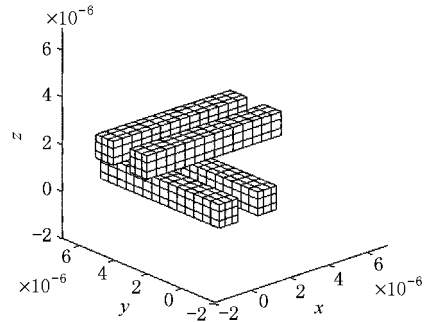


图 10 Bus2x2 交叉导体结构及其离散

为了验证 MBEM 能否正确捕捉发生在导体之间的高频邻近效应, 我们将 3 个程序计算出的平行导体间的频变电感和频变电阻示于图 11, 12, 其中横轴坐标单位为频率的对数.

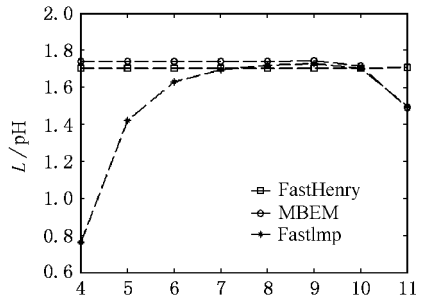


图 11 Bus2x2 交叉导体结构中频变电感曲线

从图 11 可以看到, FastImp 计算低频电感时出现的较大误差, 而在特别高的频率 ($10 \text{ GHz}, 100 \text{ GHz}$) 下, MBEM 和 FastImp 的结果一致, 反映出高频电感值下降的趋势.

图 12 中的结果与上面的分析类似, MBEM 和 FastImp 都反映出高频下互电阻不为零的现象, 说明混合边界积分方程法能准确地处理高频邻近效应.

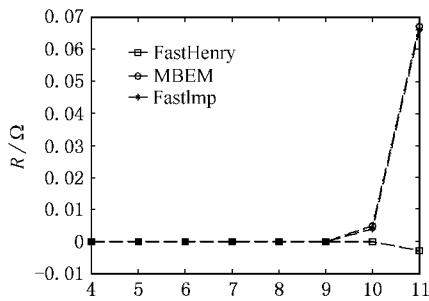


图 12 Bus2×2 交叉导体结构中频变电阻曲线

3.3 时间比较

当频率为 1 GHz 时, FastImp 和 MBEM 计算上述 2 个算例的 CPU 时间比较如表 4 所示。

对单直导体算例, 由于 MBEM 包含的变量数较

小以及采用了有效的预条件技术, 它将求解线性方程组的时间从 FastImp 的 1.7 s 减小为 0.71 s。但由于 MBEM 需处理更高阶的积分, 其计算边界积分的时间(10.8 s)大于 FastImp 计算积分的时间(7.69 s), 并且 MBEM 还涉及更多的矩阵乘, 即表 4 中的额外矩阵乘时间(2.42 s), 所以 MBEM 的总计算时间略大于 FastImp。

对于 Bus2×2 算例, 2 种方法变量数分别为 3 536 和 2 024。虽然 MBEM 在形成离散方程时需要额外的矩阵乘操作(33.06 s), 但是 2 种方法在求解 $Ax=b$ 上的时间差别却很明显: MBEM 为 10.6 s (42.4 s/4), FastImp 为 41.38 s (165.52 s/4)。所以在总计算时间上 MBEM 比 FastImp 快近 60 s。

表 4 2 个算例的 CPU 时间比较

		变量数目	计算边界积分时间/s	额外矩阵乘时间/s	形成预条件时间/s	分解预条件矩阵时间/s	求解 $Ax=b$ 时间/s	总计算时间/s
单直导体	FastImp	1 136	7.69		0.04	0.01	1.7	9.43
	MBEM	650	10.8	2.42	0.81	0.36	0.71	15.25
Bus2×2 结构	FastImp	3 536	22.27		0.15	0.02	165.52	187.97
	MBEM	2 024	30.71	33.06	6.86	11.09	42.4	128.51

特别地, 对有 m 个导体的结构, 为得到完整的阻抗矩阵, 整体线性方程组需针对不同的右端项求解 m 次, 这将使 MBEM 变量数少的优势变得更加突出。

4 结 论

本文基于 MBEM, 在离散线性方程组形成和求解等方面进行了改进, 提出稀疏矩阵存储方式, 以减少离散方程形成中所需的额外矩阵乘运算时间; 并采用矩阵行列调整和预条件技术加速 GMRES 迭代法求解效率, 最终得到一个快速的三维互连阻抗提取算法。数值实验表明, 本文算法在同等情况下显示出比 FastImp 速度快的优势, 同时克服了 FastImp 低频情况下计算不准的缺点。

在今后的工作中, 可考虑将多极加速、预校正的快速傅里叶变换等快速算法应用于基于混合边界积分方程的三维互连阻抗提取算法中。

参 考 文 献

- [1] Ruehli Albert E. Equivalent circuit models for three-dimensional multiconductor systems[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 1974, 22(3): 216-221
- [2] Kamon Mattan, Tsuk Michael J, White Jacob K. FastHenry: a multipole-accelerated 3-D inductance extraction program[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 1994, 42(9): 1750-1758
- [3] Wang Junfeng. A new surface integral formulation of EMQS impedance extraction for 3-D structures[D]. Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology, 1999
- [4] Wang J, Tausch J, White J. A wide frequency range surface integral formulation for 3-D RLC extraction[C]//Proceedings of International Conference on Computer Aided-Design, San Jose, California, 1999: 453-457
- [5] Zhu Zhenhai, Song Ben, White Jacob. Algorithms in FastImp: a fast and wide-band impedance extraction program for complicated 3-D geometries[J]. IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, 2005, 24(7): 981-998
- [6] Yan Changhao, Yu Wenjian, Wang Zeyi. A mixed boundary element method for extracting frequency-dependent inductances of 3D interconnects[C]//Proceedings of the 7th International Symposium on Quality Electronic Design (ISQED '06), San Jose, California, 2006: 709-716
- [7] Hu Xin, Daniel Luca, White Jacob. Partitioned conduction modes in surface integral equation-based impedance extraction[C]//Proceedings of Electrical Performance of Electronic Packaging, Princeton, New Jersey, 2003: 355-358
- [8] Athanasiadis G. Numerical investigations of direct and indirect integral equations for solving the heat conduction problem[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1985, 49(22): 203-220
- [9] Guiggiani M, Krishnasamy G, Rudolphi T J, et al. A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations[J]. Journal of Applied Mechanics, 1992, 59(3): 604-614
- [10] Zhu Zhenhai, Song Ben, White Jacob. FastImp[OL]. [2007-01-01]. <http://www.mit.edu/people/zhzhu/fastImp.html>